Prof. Reiner Kree
Wojciech Dybalski

Universität Göttingen
Wintersemester 2007

Statistical Physics and Thermodynamics
Self-Test

Alle Aufgaben dieses Blattes gehören in die Kategorie **T**. Für die Lösungen werden keine Punkte vergeben, die Aufgaben werden korrigiert und zurückgegeben, aber nicht (!!!) im Detail in den Übungsgruppen besprochen. Der Selbsttest dient zur Förderung der Selbsteinschätzung und zur weiteren, selbständigen Einübung des Stoffes ohne "Punktedruck". Der Gesamtumfang ist größer als der einer Klausur, aber alle Aufgaben sind geeignet, um Sie ohne weitere Hilfsmittel zu lösen. Erst wenn Sie das nicht schaffen, rekapitulieren Sie die entsprechenden Abschnitte der Vorlesung oder lesen in der Lehrbuchliteratur nach. Geben Sie die Lösungen bitte in einer Form ab, die der von Klausuraufgaben entspricht, für die Sie hoffen, auch Punkte zu bekommen.

Aufgabe 1: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Produkt der Augenzahlen zweier Würfel bei einem Wurf größer ist als 15?

Aufgabe 2: Berechnen Sie die charakteristische Funktion der Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(z) = a\ \exp(-az)$, $0 \leq z < \infty$ und bestimmen Sie mit Hilfe dieser Funktion die Varianz von z.

Aufgabe 3: x, y seien unabhängig Gauss-verteilt mit $< x >=< y >= 0$ und Varianzen $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichten für $z_+ = x+y$ und $z_- = x-y$.

Aufgabe 4: Gegeben seien N statistisch unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen $x_i,\ i = 1 \ldots N$, die alle die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\rho(x) = \frac{1}{4}\delta(x) + \frac{1}{2}\delta(x - \frac{3}{4}) + \frac{1}{4}\delta(x-1)$$

besitzen. Wie lautet die Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsvariablen $z_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} x_i$ für $N \to \infty$?

Aufgabe 5: Wo liegt der Median der Exponentialverteilung $\rho(z) = a\,\exp(-az)$, $0 \leq z < \infty$?

Aufgabe 6: Für die Lebensdauer T von Glühbirnen ist die Exponentialverteilung $\rho(T) = (1/\tau)\exp(-T/\tau)$ ein gutes Modell. Gegeben sei eine Messreihe $\{T_i,\ i = 1\ldots, N\}$. Bestimmen Sie den *maximal likelihood* Schätzwert für τ.

Aufgabe 7: Bei einem χ^2 Test ergibt sich für die normierten Abweichungen einer Messreihe (Daten aufgeteilt in 10 Bins) von den Modellwahrscheinlichkeiten für die Bins ein $\chi^2 = 0.7$. Wie groß ist die Irrtumswahrscheinlichkeit, wenn Sie das Modell akzeptieren. **Hinweis:** Siehe die beigefügte Tabelle aus Abramowitz et al. 'Handbook of Mathematical Functions', Dover Publications INC., New York 1965.

Aufgabe 8: Ist

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} 1/2 & i \\ -i & 1/2 \end{pmatrix}$$

ein quantenmechanischer Zustandsoperator? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 9: Betrachten Sie ein System aus N Brownschen Teilchen (mit Masse 1), die sich überdämpft, kräftefrei und ohne Wechselwirkungen untereinander in 1 Dimension bewegen, d.h. die Orte der Teilchen genügen den Langevingleichungen $\dot{x}_i = \xi_i(t)$, wobei $<\xi_i>= 0$, $<\xi_i(t)\xi_j(t')>= 2D\delta(t-t')\delta_{ij}$ (D: Diffusionskonstante eines Teilchens). Wie groß ist die Diffusionskonstante des Schwerpunktes der N Teilchen?

Aufgabe 10: DNA Stücke können als 2 Einzelketten (E) oder als Doppelhelix (D) vorliegen. Das Reaktionsschema für diese Konformationsänderung ist

$$k_+ :\ E + E \rightarrow D$$

$$k_- :\ D \rightarrow E + E,$$

wobei $k_\pm$ die spezifischen Reaktionsraten bezeichnen. Stellen Sie die chemische Mastergleichung dazu auf.

Aufgabe 11: Geladene Teilchen (Ladung $q < 0$) bewegen sich unter dem Einfluss eines homogenen elektrischen Feldes $\vec{E} = |E|\vec{e}_z$ parallel zur z-Achse in einem viskosen Medium ($0 \leq z < \infty$) mit Reibungskoeffizient η (*Elektrophorese*). Die Bewegung verläuft überdämpft, d.h. sie genügt der Langevingleichung

$$\dot{z} = -\frac{|q||E|}{\eta} + \xi(t)$$

mit $< \xi >= 0$, $< \xi(t)\xi(t') >= \frac{2kT}{\eta}\delta(t-t')$. Stellen Sie die zugehörige Fokker-Planck Gleichung auf. Schreiben Sie diese Fokker-Planck Gleichung in Form einer Kontinuitätsgleichung und bestimmen Sie die stationäre Lösung zu verschwindender Stromdichte.

Aufgabe 12: Die Energien der diskreten Zustände $\{n\}$ eines Systems seien E_n. Das eindeutige, stationäre Gleichgewicht des Systems sei der kanonische Zustand, d.h. $P_{eq}(n) = Z^{-1}\exp(-\beta E_n)$. Konstruieren Sie einen Satz von Übergangsraten $r(n|m)$ für die Mastergleichung, der für dieses System die Bedingungen der detaillierten Balance erfüllt.

Aufgabe 13: $x(t)$ genüge der Langevingleichung

$$\Delta x(t) = x(t)dt + dW_t$$

wobei dW_t Inkremente des Wiener Prozesses mit $< dW_t >= 0$ und $< (dW_t)^2 >= \sigma^2 dt$ sind. Bestimmen Sie den Mittelwert und die Varianz der Inkremente von $z(t) = x^2(t)$ und stellen Sie aus diesem Ergebnis die Fokker-Planck Gleichung für $\rho(z,t)$ auf.

Aufgabe 14: Entwerfen Sie ein Flussdiagramm oder ein Pseudocodefragment für eine Modifikation des Gillespie Algorithmus für den Fall, dass das System *absorbierende Zustände* besitzt. Das sind Zustände n, in die Trajektorien zwar hineinspringen können, d.h. die Raten $r(n|m)$ sind i.a. ungleich Null, aus denen das System aber nie mehr heraus kommt, d.h. $r(m|n) = 0$ für alle $m \neq n$.

Aufgabe 15: Berechnen Sie die Varianz des Volumens eines idealen Gases bei Druck p, Temperatur T und Teilchenzahl N.

Aufgabe 16: Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme für ein 1-dimensionales System klassischer, ununterscheidbarer Teilchen mit der Hamiltonfunktion

$$H = c\sum_{i=1}^{N} |p_i|$$

wobei p_i den Impuls des i-ten Teilchens bezeichnet (*ultrarelativistisches, ideales Gas*). Bestimmen Sie die Freie Energie und die spezifische Wärme c_V für dieses Gas.

Aufgabe 17: Bestimmen Sie den thermodynamischen Limes von S/N für

$$\omega(E) = \frac{\epsilon^N}{N!}[\alpha V]^{\gamma N}[(1-\alpha)V]^{(1-\gamma)N},$$

wobei $0 \leq \gamma \leq 1$, $0 \leq \alpha \leq 1$ und ϵ eine Konstante (nicht extensiv) ist. Wo liegt das Maximum von $S(\alpha)$ bei vorgegebenem γ?

Aufgabe 18: Bestimmen Sie die Ableitung der Entropie $S(T, V)$ nach dem Volumen für ein System mit thermischer Zustandsgleichung $p = \phi(V, T)$.

Aufgabe 19: Gegeben sei die thermische Zustandsgleichung $p = \phi(V, T)$ und die kalorische Zustandsgleichung $S = \chi(V, T)$. $\phi(V, T)$ sei auflösbar zu $V = \phi^{-1}(p, T)$. Bestimmen Sie $dG(p, T)$, d.h. das totale Differential der Freien Enthalpie.

Aufgabe 20: Ein 1-dimensionales, ideales Gas in einem Kasten $0 \leq x \leq L$ und im homogenen Kraftfeld $U(x) = fx$ befindet sich im thermischen Gleichgewicht zu festen T, L, N. Nun wird f quasistatisch (infinitesimal) verändert $f \to f + df$. Bestimmen Sie die dem System zugeführte Wärme und die am System geleistete Arbeit (linear in df).

Due date: Monday, 07.01.2008, 09:55h

Table 26.7 PROBABILITY INTEGRAL OF χ^2-DISTRIBUTION, INCOMPLETE GAMM
CUMULATIVE SUMS OF THE POISSON DISTRIBUTION

ν	$\chi^2=0.001$	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.0
	$m=0.0005$	0.0010	0.0015	0.0020	0.0025	0.0030	0.0035	0.0040	0.0
1	0.97477	0.96433	0.95632	0.94957	0.94363	0.93826	0.93332	0.92873	0.92
2	0.99950	0.99900	0.99850	0.99800	0.99750	0.99700	0.99651	0.99601	0.99
3	0.99999	0.99998	0.99996	0.99993	0.99991	0.99988	0.99984	0.99981	0.99
4							0.99999	0.99999	0.99

ν	$\chi^2=0.01$	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.0
	$m=0.005$	0.010	0.015	0.020	0.025	0.030	0.035	0.040	0.0
1	0.92034	0.88754	0.86249	0.84148	0.82306	0.80650	0.79134	0.77730	0.76
2	0.99501	0.99005	0.98511	0.98020	0.97531	0.97045	0.96561	0.96079	0.95
3	0.99973	0.99925	0.99863	0.99790	0.99707	0.99616	0.99518	0.99412	0.99
4	0.99999	0.99995	0.99989	0.99980	0.99969	0.99956	0.99940	0.99922	0.99
5			0.99999	0.99998	0.99997	0.99995	0.99993	0.99991	0.99
6							0.99999	0.99999	0.99

ν	$\chi^2=0.1$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.
	$m=0.05$	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.
1	0.75183	0.65472	0.58388	0.52709	0.47950	0.43858	0.40278	0.37109	0.34
2	0.95123	0.90484	0.86071	0.81873	0.77880	0.74082	0.70469	0.67032	0.63
3	0.99184	0.97759	0.96003	0.94024	0.91889	0.89643	0.87320	0.84947	0.82
4	0.99879	0.99532	0.98981	0.98248	0.97350	0.96306	0.95133	0.93845	0.92
5	0.99984	0.99911	0.99764	0.99533	0.99212	0.98800	0.98297	0.97703	0.97
6	0.99998	0.99985	0.99950	0.99885	0.99784	0.99640	0.99449	0.99207	0.98
7		0.99997	0.99990	0.99974	0.99945	0.99899	0.99834	0.99744	0.99
8			0.99998	0.99994	0.99987	0.99973	0.99953	0.99922	0.99
9				0.99999	0.99997	0.99993	0.99987	0.99978	0.99
10					0.99999	0.99998	0.99997	0.99994	0.99
11							0.99999	0.99998	0.99
12									0.99

ν	$\chi^2=1.1$	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
	$m=0.55$	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.9
1	0.29427	0.27332	0.25421	0.23672	0.22067	0.20590	0.19229	0.17971	0.168
2	0.57695	0.54881	0.52205	0.49659	0.47237	0.44933	0.42741	0.40657	0.386
3	0.77707	0.75300	0.72913	0.70553	0.68227	0.65939	0.63693	0.61493	0.593
4	0.89427	0.87810	0.86138	0.84420	0.82664	0.80879	0.79072	0.77248	0.754
5	0.95410	0.94488	0.93493	0.92431	0.91307	0.90125	0.88890	0.87607	0.862
6	0.98154	0.97689	0.97166	0.96586	0.95949	0.95258	0.94512	0.93714	0.928
7	0.99305	0.99093	0.98844	0.98557	0.98231	0.97864	0.97457	0.97008	0.965
8	0.99753	0.99664	0.99555	0.99425	0.99271	0.99092	0.98887	0.98654	0.983
9	0.99917	0.99882	0.99838	0.99782	0.99715	0.99633	0.99537	0.99425	0.992
10	0.99973	0.99961	0.99944	0.99921	0.99894	0.99859	0.99817	0.99766	0.997
11	0.99992	0.99987	0.99981	0.99973	0.99962	0.99948	0.99930	0.99908	0.998
12	0.99998	0.99996	0.99994	0.99991	0.99987	0.99982	0.99975	0.99966	0.999
13	0.99999	0.99999	0.99998	0.99997	0.99996	0.99994	0.99991	0.99988	0.999
14			0.99999	0.99999	0.99999	0.99998	0.99997	0.99996	0.999
15						0.99999	0.99999	0.99999	0.999
16									0.999

$Q(\chi^2|\nu)=1-P(\chi^2|\nu)=\left[2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right]^{-1}\int_{\chi^2}^{\infty}e^{-\frac{t}{2}}t^{\frac{\nu}{2}-1}dt=\left[\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right]^{-1}\int_{\frac{1}{2}\chi^2}^{\infty}e^{-t}t^{\frac{\nu}{2}-1}dt=\sum_{j=0}^{c-1}e^{-m}m^j/j!$ (ν even, $c=$

Compiled from E. S. Pearson and H. O. Hartley (editors), Biometrika tables for statistic
Cambridge Univ. Press, Cambridge, England, 1954 (with permission).