2. Rekursives Filter 1. Ordnung

Übertragungsfunktion/Frequenzgang

Abtastfrequenz f_s:

$s := 10000$

$$10000 \tag{1.1}$$

Übertragungsfunktion:

$$H(f, B) := \frac{1}{1 - B \cdot \exp\left(-\frac{2 \cdot \mathrm{Pi} \cdot I \cdot f}{s}\right)}$$

$$(f, B) \rightarrow \frac{1}{1 - B\,\mathrm{e}^{-\frac{2\,\mathrm{I}\,\pi\,f}{s}}} \tag{1.2}$$

Komplex-konjugierte der Übertragungsfunktion:

$$K(f, B) := \frac{1}{1 - B \cdot \exp\left(\frac{2 \cdot \mathrm{Pi} \cdot I \cdot f}{s}\right)}$$

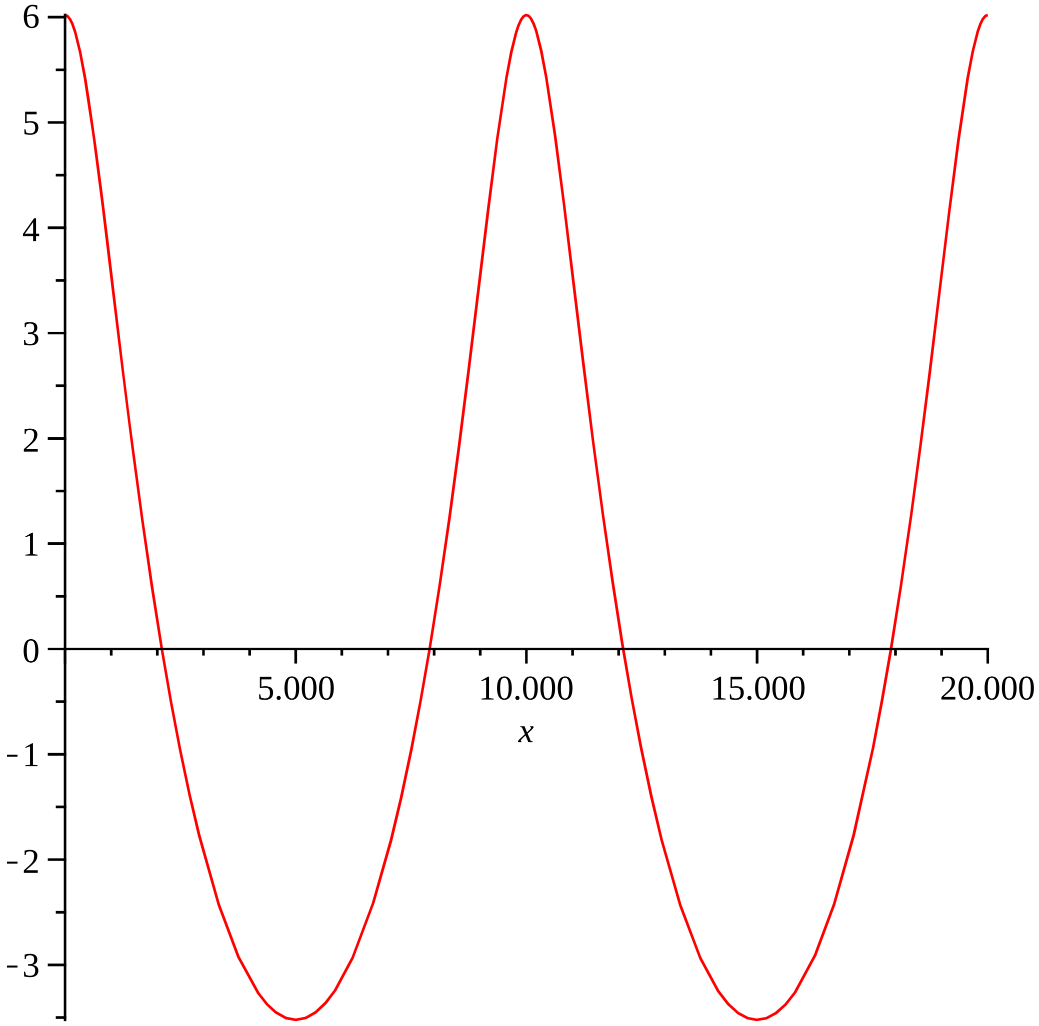
$$(f, B) \rightarrow \frac{1}{1 - B\,\mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{I}\,\pi\,f}{s}}} \tag{1.3}$$

Logartihmieren des Betragsquadrats ergibt P(f):

$P(f, B) := 10 \cdot \log10(H(f, B) \cdot K(f, B))$

$$(f, B) \rightarrow 10 \log10(H(f, B)\, K(f, B)) \tag{1.4}$$

$plot(P(x, 0.5), x = 0..20000)$



Umkehrfunktion ermitteln

Auflösen nach P ergibt f(P):

solve$(P(f, B) = \mathrm{p}, f)$

$$\frac{1}{\pi}\left(5000\,\mathrm{I}\ln\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{10}\,p\ln(10)}\,B}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{10}\,p\ln(10)}+\mathrm{e}^{\frac{1}{10}\,p\ln(10)}\,B^2-1\right.\right.\right.$$
$$+\left(\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{10}\,p\ln(10)}\right)^2-2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{10}\,p\ln(10)}\right)^2 B^2-2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{10}\,p\ln(10)}\right.$$
$$\left.\left.\left.\left.+\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{10}\,p\ln(10)}\right)^2 B^4-2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{10}\,p\ln(10)}\,B^2+1\right)^{1/2}\right)\right)\right), \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{\pi}\left(5000\,\mathrm{I}\ln\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{10}\,p\ln(10)}\,B}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{10}\,p\ln(10)}+\mathrm{e}^{\frac{1}{10}\,p\ln(10)}\,B^2-1\right.\right.\right.$$
$$-\left(\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{10}\,p\ln(10)}\right)^2-2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{10}\,p\ln(10)}\right)^2 B^2-2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{10}\,p\ln(10)}\right.$$

$$+\left(\left(e^{\frac{1}{10}p\ln(10)}\right)^2 B^4 - 2\,e^{\frac{1}{10}p\ln(10)} B^2 + 1\right)^{1/2}\Bigg)\Bigg)\Bigg)$$

Definieren der neuen Funktion f(P):

$$f(p,B) := \frac{1}{\pi}\left(5000\,\mathrm{I}\ln\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{e^{\frac{1}{10}p\ln(10)}B}\left(e^{\frac{1}{10}p\ln(10)} + e^{\frac{1}{10}p\ln(10)}B^2 - 1 - \left(\left(e^{\frac{1}{10}p\ln(10)}\right)^2 - 2\left(e^{\frac{1}{10}p\ln(10)}\right)^2 B^2 - 2\,e^{\frac{1}{10}p\ln(10)} + \left(e^{\frac{1}{10}p\ln(10)}\right)^2 B^4 - 2\,e^{\frac{1}{10}p\ln(10)} B^2 + 1\right)^{1/2}\right)\right)\right)$$

$$(p,B) \rightarrow \frac{1}{\pi}\left(5000\,\mathrm{I}\ln\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{e^{\frac{1}{10}p\ln(10)}B}\left(e^{\frac{1}{10}p\ln(10)} + e^{\frac{1}{10}p\ln(10)}B^2 - 1 - \left(\left(e^{\frac{1}{10}p\ln(10)}\right)^2 - 2\left(e^{\frac{1}{10}p\ln(10)}\right)^2 B^2 - 2\,e^{\frac{1}{10}p\ln(10)} + \left(e^{\frac{1}{10}p\ln(10)}\right)^2 B^4 - 2\,e^{\frac{1}{10}p\ln(10)} B^2 + 1\right)^{1/2}\right)\right)\right) \qquad \textbf{(2.2)}$$

Berechnen der Grenzfrequenz

für beta_1 := 0.5

$evalf(f(P(0, 0.5) - 3, 0.5))$

$$1147.414429 + 1.099919812\ 10^{-7}\ \mathrm{I} \qquad \textbf{(3.1.1)}$$

für beta_1 := 0.9

$evalf(f(P(0, 0.9) - 3, 0.9))$

$$167.4433754 - 2.453373447\ 10^{-8}\ \mathrm{I} \qquad \textbf{(3.2.1)}$$

für beta_1 := 0.98

$evalf(f(P(0, 0.98) - 3, 0.98))$

$$32.07843854 - 5.445666255\ 10^{-7}\ \mathrm{I} \qquad \textbf{(3.3.1)}$$

3. Rekursives Filter 1. Ordnung

Übertragungsfunktion/Frequenzgang

Abtastfrequenz f_s:

$s := 10000$

$$10000 \tag{1.1}$$

Übertragungsfunktion:

$$H(f, A, B1, B2) := \frac{A \cdot \exp\left(-\frac{2 \cdot \mathrm{Pi} \cdot I \cdot f}{s}\right)}{1 - B1 \cdot \exp\left(-\frac{2 \cdot \mathrm{Pi} \cdot I \cdot f}{s}\right) - B2 \cdot \exp\left(-\frac{4\,\mathrm{Pi} \cdot I \cdot f}{s}\right)}$$

$$(f, A, B1, B2) \rightarrow \frac{A\,\mathrm{e}^{-\frac{2\,I\,\pi f}{s}}}{1 - B1\,\mathrm{e}^{-\frac{2\,I\,\pi f}{s}} - B2\,\mathrm{e}^{-\frac{4\,I\,\pi f}{s}}} \tag{1.2}$$

Komplex − konjugierte der Übertragungsfunktion :

$$K(f, A, B1, B2) := \frac{A \cdot \exp\left(\frac{2 \cdot \mathrm{Pi} \cdot I \cdot f}{s}\right)}{1 - B1 \cdot \exp\left(\frac{2 \cdot \mathrm{Pi} \cdot I \cdot f}{s}\right) - B2 \cdot \exp\left(\frac{4\,\mathrm{Pi} \cdot I \cdot f}{s}\right)}$$

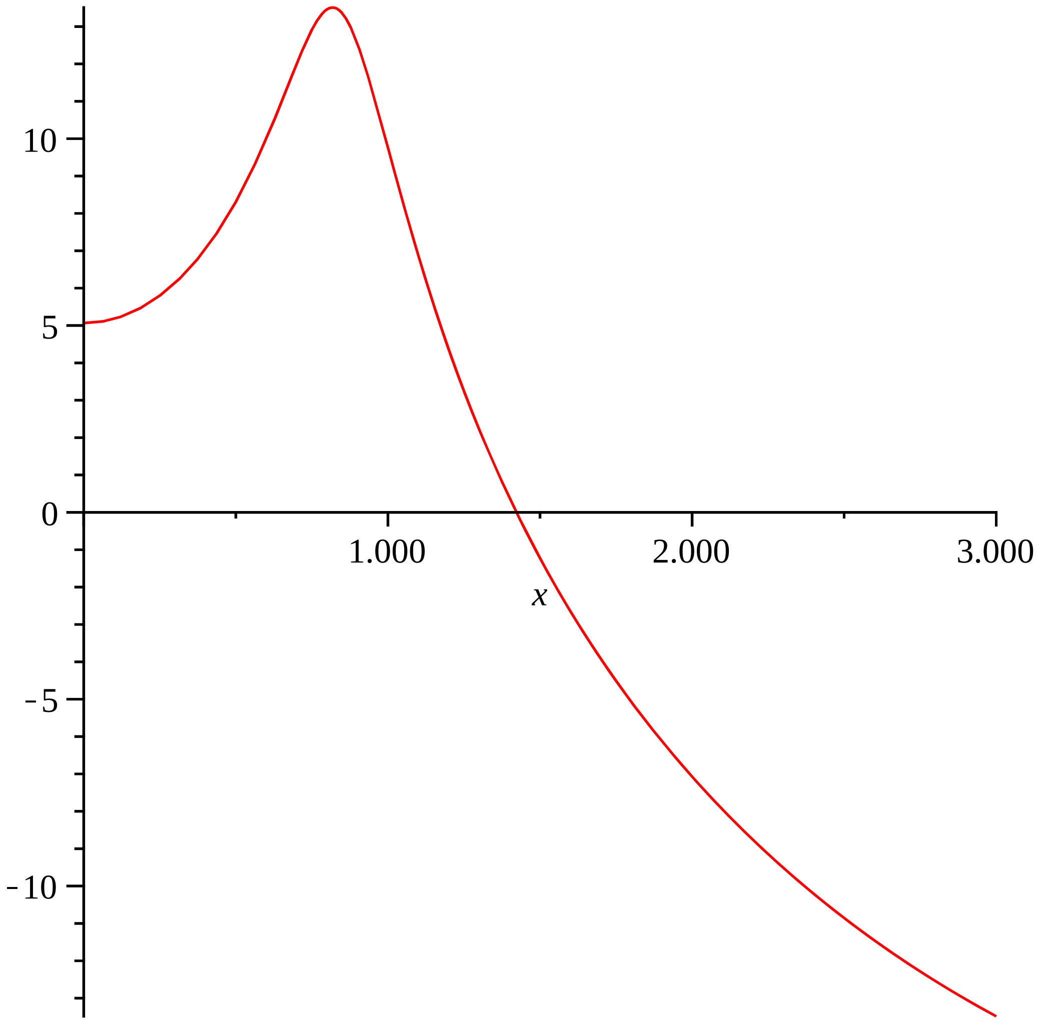
$$(f, A, B1, B2) \rightarrow \frac{A\,\mathrm{e}^{\frac{2\,I\,\pi f}{s}}}{1 - B1\,\mathrm{e}^{\frac{2\,I\,\pi f}{s}} - B2\,\mathrm{e}^{\frac{4\,I\,\pi f}{s}}} \tag{1.3}$$

Logartihmieren des Betragsquadrats ergibt P(f):

$P(f, A, B1, B2) := 10 \cdot \log10(H(f, A, B1, B2) \cdot K(f, A, B1, B2))$

$$(f, A, B1, B2) \rightarrow 10\,\log10(H(f, A, B1, B2)\,K(f, A, B1, B2)) \tag{1.4}$$

$plot(P(x, 0.45, 1.5588, -0.81), x = 0..3000)$



Suchen des Maximums

Ableiten von P(f):

$Q(f, A, B1, B2) := diff(P(f, A, B1, B2), f)$

$$(f, A, B1, B2) \rightarrow \frac{\partial}{\partial f} P(f, A, B1, B2) \quad \textbf{(2.1)}$$

für r:=0.9 und somit alpha_1 := 0.45, beta_1:=1.5588, beta_2:=-0.81

Stelle :

$solve(Q(f, 0.45, 1.5588, -0.81) = 0, f)$

$$0., 5000., 817.9713036 + 4.746000403\ 10^{-19}\ \mathrm{I},\ -817.9713036 + 4.746000403\ 10^{-19}\ \mathrm{I} \quad \textbf{(2.1.1)}$$

Wert:

$evalf(\ P(817.971303, 0.45, 1.5588, -0.81))$

$$13.50901388 + 0.\ \mathrm{I} \quad \textbf{(2.1.2)}$$

für r:=0.95 und somit alpha_1 := 0.475, beta_1:=1.6454, beta_2:= -0.9025

Stelle :

$solve(Q(f, 0.475, 1.6454, -0.9025) = 0, f)$

$0., 5000., 829.7802664 - 6.238873769\ 10^{-19}\ I, -829.7802664 - 6.238873769\ 10^{-19}\ I$ **(2.2.1)**

Wert:

$evalf(P(829.780266, 0.475, 1.6454, -0.9025))$

$$19.77361546 + 0.\ I \quad \textbf{(2.2.2)}$$

für r:=0.99 und somit alpha_1 := 0.495, beta_1:=1.7147, beta_2:= -0.9801

Stelle:

$solve(Q(f, 0.495, 1.7147, -0.9801) = 0, f)$

$0., 5000., 833.2428171 + 7.193166808\ 10^{-25}\ I, -833.2428171 + 7.193166808\ 10^{-25}\ I$ **(2.3.1)**

Wert:

$evalf(P(833.242817, 0.495, 1.7147, -0.9801))$

$$33.93518203 + 0.\ I \quad \textbf{(2.3.2)}$$

4. Nichtrekursives Filter

Übertragungsfunktion/Frequenzgang

Abtastfrequenz f_s:

$s := 10000$

$$10000 \tag{1.1}$$

Übertragungsfunktion:

$H(f, A0, A1, A2) := A0 + A1 \cdot \exp\left(-\frac{2 \cdot \mathrm{Pi} \cdot I \cdot f}{s}\right) + A2 \cdot \exp\left(-\frac{4 \cdot \mathrm{Pi} \cdot I \cdot f}{s}\right)$

$$(f, A0, A1, A2) \rightarrow A0 + A1\, \mathrm{e}^{-\frac{2 \mathrm{I} \pi f}{s}} + A2\, \mathrm{e}^{-\frac{4 \mathrm{I} \pi f}{s}} \tag{1.2}$$

Komplex − konjugierte der Übertragungsfunktion :

$K(f, A0, A1, A2) := A0 + A1 \cdot \exp\left(\frac{2 \cdot \mathrm{Pi} \cdot I \cdot f}{s}\right) + A2 \cdot \exp\left(\frac{4 \cdot \mathrm{Pi} \cdot I \cdot f}{s}\right)$

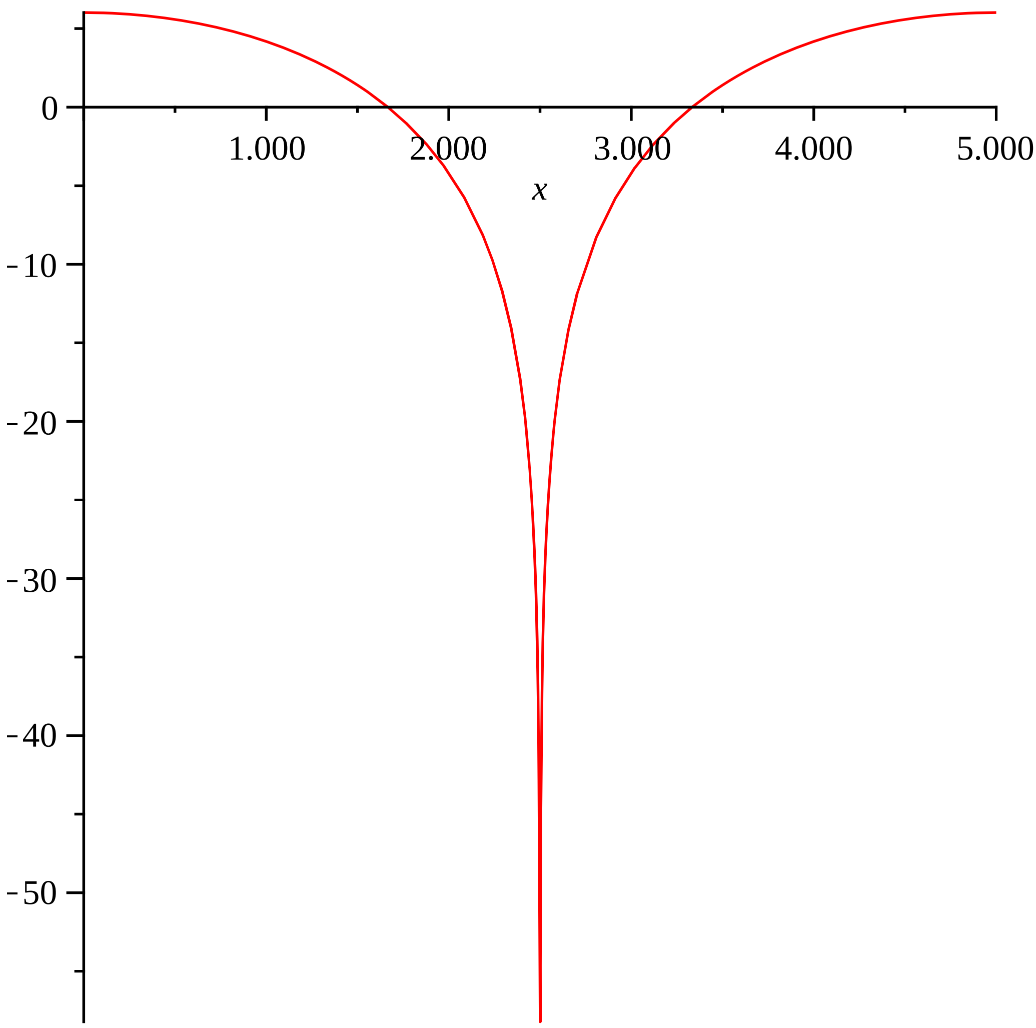
$$(f, A0, A1, A2) \rightarrow A0 + A1\, \mathrm{e}^{\frac{2 \mathrm{I} \pi f}{s}} + A2\, \mathrm{e}^{\frac{4 \mathrm{I} \pi f}{s}} \tag{1.3}$$

Logartihmieren des Betragsquadrats ergibt P(f):

$P(f, A0, A1, A2) := 10 \cdot \log10(H(f, A0, A1, A2) \cdot K(f, A0, A1, A2))$

$$(f, A0, A1, A2) \rightarrow 10 \log10(H(f, A0, A1, A2)\, K(f, A0, A1, A2)) \tag{1.4}$$

$plot(P(x, 1, 0, 1), x = 0 .. 5000)$



Nullstellen der Übertragungsfunktion bzw. Sperrfrequenz

für a_0:=a_1:=a_2:=1

$evalf(solve(H(f, 1, 1, 1) = 0, f))$

$$-3333.333332 + 2.971104477\ 10^{-7}\ I,\ 3333.333332 + 2.971104477\ 10^{-7}\ I \qquad (2.1.1)$$

für a_0:=a_2:=1; a_1:=0

$solve(H(f, 1, 0, 1) = 0, f)$

$$-2500 \qquad (2.2.1)$$