


FORTGESCHRITTENEN-PRAKTIKUM
AM DRITTEN PHYSIKALISCHEN INSTITUT
DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN
WINTERSEMESTER 2007

Protokoll zum Versuch
213

*Messung der Phasen- und Gruppengeschwindigkeit
mit Ultraschall*

Name: Jan Schumann-Bischoff


(Unterschrift)

<i>Praktikumspartner:</i>	Katharina Rabe
<i>Assistent:</i>	Robert Mettin
<i>Versuch durchgeführt am:</i>	30.10.2007
<i>Protokoll erstellt am:</i>	3.11.07

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Theorie	3
2.1	Grundlagen zu Wellen (allgemein)	3
2.2	Akustische Wellengleichung	5
2.2.1	Entwicklung der Wellengleichung	5
2.2.2	Randbedingungen	8
2.2.3	Lösung der Wellengleichung für eine schallweich begrenzte Wasserrinne	9
3	Auswertung	13
3.1	Phasengeschwindigkeit	13
3.2	Gruppengeschwindigkeit	13
3.3	Ergebnisse	13
4	Diskussion	14

1 Einleitung

Bei dem Versuch „Messung der Phasen- und Gruppengeschwindigkeit mit Ultraschall“ wird die Ausbreitungsgeschwindigkeit (d.h. Gruppen- und Phasengeschwindigkeit) von Schallwellen in einer Wasserwanne untersucht. Insbesondere wird die Abhängigkeit der entsprechenden Größen von den Randbedingungen (z.B. die Wasserhöhe in der Wanne) betrachtet. Die Schallwelle (12,5kHz) wird durch ein Signalgenerator erzeugt und ein Mikrofon nimmt die Signale an anderer Stellen in der Wasserrinne wieder auf. Aus dem entsprechendem aufgenommenem Signal können mit den anderen Parametern Rückschlüsse auf die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit der Schallwelle geschlossen werden.

2 Theorie

2.1 Grundlagen zu Wellen (allgemein)

Eine einfache (der Einfachheit halber eindimensionale) ebene Welle lässt sich durch

$$a(x, t) = a_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \quad (2.1)$$

beschreiben, wobei a_0 die Amplitude, ω die Kreisfrequenz, φ die Phasenverschiebung, x der Ort, k die Wellenzahl und t die Zeit ist. Ihr schematischer Verlauf ist in (Abb. 1) dargestellt. Mit wachendem t wird diese Welle nach rechts „wandern“. Die **Phasengeschwindigkeit**

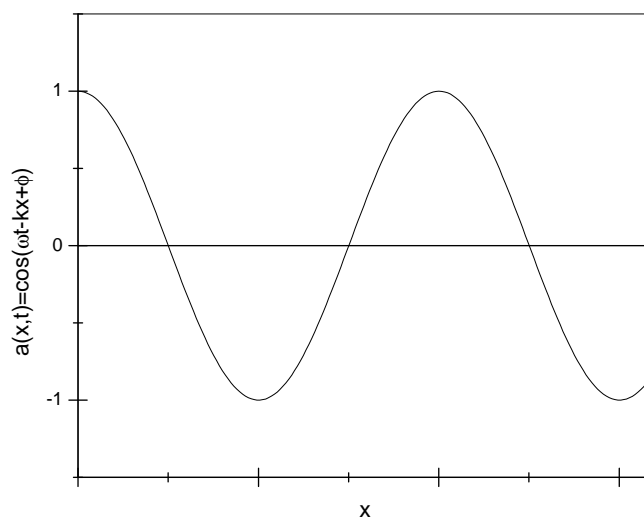


Abbildung 1: Schematischer Verlauf einer ebenen Welle für einen festen Zeitpunkt t

c_p ist gerade die Geschwindigkeit, mit welcher sich ein Ort fester Phase $\omega t - kx + \varphi = \text{const} \Rightarrow x = \frac{\omega}{k}t + \frac{\varphi - \text{const}}{k}$ bewegt. Wählt man z.B. $\text{const} = 0$, so „sitzt“ man auf einem

Wellenberg und die Phasengeschwindigkeit ist gerade die Geschwindigkeit, mit welcher sich der Berg bewegt. Folglich gilt für die Phasengeschwindigkeit:

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{\text{Phase}=\text{const}} = \frac{\omega}{k} =: c_{ph} \quad (2.2)$$

Wir wollen hier der Einfachheit halber Wellen durch die komplexe Schreibweise darstellen. Eine Sinuswelle ist demnach definiert durch

$$a(x, t) = \underline{a}_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

wobei $\underline{a}_0 = a_0 e^{i\varphi}$ ebenfalls komplex ist und die Information über die Phasenverschiebung φ enthält.

Nun wollen wir Überlagerungen einer Welle anschauen. Das addieren (bzw. integrieren) verschiedener Wellen mit unterschiedlichen Wellenzahlen k liefert uns in integraler Form:

$$a(x, t) = \int_{k_0 - \Delta k/2}^{k_0 + \Delta k/2} \tilde{\underline{a}}_0(k) e^{i(\omega(k)t - kx)} dk \quad (2.3)$$

$a(x, t)$ ist also eine Welle, dargestellt durch Überlagerungen von ebenen Wellen mit der komplexen Amplitudendichte $\tilde{\underline{a}}_0(k)$ (wobei die Phasenverschiebung natürlich wieder enthalten ist). k_0 gibt mir die mittlere Wellenzahl an, in dessen Umgebung $\Delta k/2$ sich die Wellenzahlen k der sich überlagernden Wellen befinden. Eine Überlagerung ebener Wellen ist schematisch in (Abb. 2) dargestellt. Der Wellenzug ist unverkennbar. Die **Gruppengeschwindigkeit** c_{gr} ist gerade die Geschwindigkeit, mit welcher sich ein Wellenzug ausbreitet. Für kleine Δk_0 lässt sich $\omega(k)$ um k_0 entwickeln. Wir brechen nach dem linearen Term ab. Mit $\omega(k_0) = \omega_0$ und $k - k_0 = \delta k$ ergibt sich für die Entwicklung $\omega(k) = \omega_0 + \frac{d\omega}{dk} \delta k$. Einsetzen in (2.3) ergibt:

$$a(x, t) = e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \underbrace{\int_{-\Delta k/2}^{+\Delta k/2} \tilde{\underline{a}}_0(\delta k) \exp \left[i \left(\frac{d\omega}{dk} t - x \right) \delta k \right] d(\delta k)}_{=: \underline{a}_0(x, t)}$$

$\underline{a}_0(x, t)$ ändert sich nur langsam bzgl. x und t im Gegensatz zu der Trägerwelle $e^{i(\omega_0 t - k_0 x)}$. $|\underline{a}_0(x, t)|$ kann als Amplitude für die Trägerwelle interpretiert werden. Sie bildet sozusagen die Einhüllende unseres Wellenzuges. Die Gruppengeschwindigkeit unserer Welle kann man sich also als diejenige Geschwindigkeit vorstellen, mit der sich die Einhüllende fortbewegt, d.h., die Amplitude der Trägerwelle muss konstant sein. Dies ist gegeben, wenn die Phase jeder einzelnen Welle konstant ist:

$$\begin{aligned} & \frac{d\omega}{dk} t - x = \text{const} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{d\omega}{dk} t - x \right) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d\omega(k)}{dk} &= \frac{dx}{dt} =: c_{gr} \end{aligned} \quad (2.4)$$

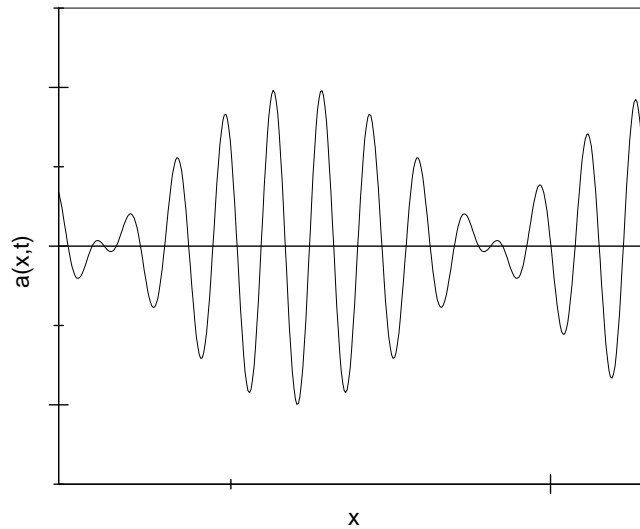


Abbildung 2: Schematische Darstellung einer Überlagerung ebener Wellen mit unterschiedlichen Wellenzahlen k und Amplituden $\tilde{a}_0(k)dk$

Mit (2.2) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 c_{gr} &= \frac{d(c_{ph}k)}{dk} \\
 &= c_{ph} + k \frac{dc_{ph}}{dk} \\
 &= c_{ph} + \lambda \frac{dc_{ph}}{d\lambda}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Aus (2.5) ist zu erkennen, dass Phasen- und Gruppengeschwindigkeit nur voneinander verschieden sind, wenn Dispersion vorliegt. Dies ist der Fall, wenn c_{ph} und somit auch ω von der Wellenzahl k abhängen.

In der Regel ist die Gruppengeschwindigkeit die physikalisch relevantere Größe, da sie die Ausbreitungsgeschwindigkeit von möglichen Signalen darstellt.

2.2 Akustische Wellengleichung

2.2.1 Entwicklung der Wellengleichung

In unserem Versuch werden Schallwellen in Wasser und ihre wichtigen Eigenschaften charakterisiert. Daher ist dieses Kapitel den Ausbreitungsgleichungen von Schallwellen gewidmet. Unter Ausnutzung der bekannten Erhaltungssätze für Impuls, Masse und Energie wird in diesem Unterkapitel die Wellengleichung für die Ausbreitung von Schallwellen in Wasser abgeleitet. Ihre spezielle Lösung mit unseren Randbedingungen wird in den nächsten Unterkapiteln dargestellt.

Schallwellen sind bekanntlich Longitudinalwellen. Es schwanken bei ihrer Ausbreitung folgende Größen:

- *Druck:* $p(\mathbf{x}, t) = p_0 + p'(\mathbf{x}, t)$
- *Schnelle:* $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$
- *Dichte:* $\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0 + \rho'(\mathbf{x}, t)$

p_0 , \mathbf{v} und ρ_0 sind die entsprechenden konstanten ungestörten Größen ($\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ ist *nicht* mit der Phasen- und Gruppengeschwindigkeit zu verwechseln!). Da unsere Wasserrinne (und somit das Wasser in ihr) ruht, muss $\mathbf{v}_0 = 0$ gesetzt werden. Es wird ebenfalls in der Herleitung der Wellengleichung benutzt, dass die (durch die Wellenausbreitung) schwankenden Größen (Schallgrößen) klein gegenüber deren ungestörten Größen sind, d.h. $p' \ll p_0$ und $\rho' \ll \rho_0$. Aus den folgenden drei Gleichungen wird die Wellengleichung hergeleitet:

Kontinuitätsgleichung:

Die Kontinuitätsgleichung lautet:

$$\dot{\rho} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0 \quad (2.6)$$

Sie besagt, dass die Quelle eines Flusses von Objekten die zeitliche Änderung ihrer Dichte ist. $\dot{\rho}$ beschreibt dabei die zeitl. Änderung der Dichte und $\operatorname{div}(\rho\mathbf{v})$ ist ein Maß für den Zu- und Abfluss von Objekten aus dem betrachteten infinitesimalen Volumenelement $d^3\mathbf{r}$. Insbesondere wird dadurch der Erhalt der Masse ausgedrückt.

Impulsgleichung:

Die Impulsdichte ist gegeben durch $\rho\mathbf{v} = \frac{[\text{Impuls}]}{[\text{Volumen}] \cdot \text{zeit}}$. Diese kann sich durch das Ausüben einer Kraft auf das Volumenelement ändern (3. Summand in (2.7)) und dadurch, dass die Grenzen unseres Raumelementes durchströmt werden und somit Masse (hier: Wassermoleküle) mit entsprechendem Impuls hinzukommen oder wegfließen können (2. Summand in (2.7)). Es gilt somit die Impulsgleichung ($\underline{\underline{I}}$ ist der Impulsdichteoperator, wird hier aber nicht näher betrachtet, da er durch das spätere linearisieren eh keinen Beitrag zur Wellengleichung leisten wird):

$$(\rho\dot{\mathbf{v}}) + \operatorname{div} \underline{\underline{I}} + \operatorname{grad} p = 0 \quad (2.7)$$

Energiegleichung:

Die Energiegleichung ist sehr komplizierter Natur. Deshalb wollen wir unser Wasser als ein ideales Gas annähern, was bei unseren Bedingungen auch gut erfüllt ist, wenn wir in (2.9) den Drucknullpunkt bei 3000atm setzen und ein $\kappa \approx 7$ wählen. Für ein ideales Gas gilt die Adiabatangleichung:

$$pV^\kappa = \text{const}$$

Desweiteren gilt $\rho = \frac{V}{m}$ und $p(\rho_0) = p_0$. Umformen und einsetzen ergibt die Abhängigkeit des Druckes $p(\mathbf{x}, t)$ von der Dichte $\rho(\mathbf{x}, t)$:

$$\begin{aligned} pV^\kappa &= \text{const} \\ \Rightarrow p &= \frac{\text{const}}{m^\kappa} \rho^\kappa \end{aligned} \quad (2.8)$$

Dividieren von (2.8) durch $p_0 = \frac{\text{const}}{m^\kappa} \rho_0^\kappa$ liefert:

$$p(\rho) = p_0 \cdot \frac{\rho^\kappa}{\rho_0^\kappa} \quad (2.9)$$

Aus (2.6), (2.7) und (2.9) wollen wir jetzt die Wellengleichung ableiten. Nach Voraussetzung sind die Schallgrößen sehr klein gegenüber den ungestörten Größen. Wir wollen nun diese drei Gleichungen linearisieren, d.h. wir können alle Glieder, in denen Produkte von Schallgrößen auftauchen, gegenüber den Gliedern, wo die Schallgrößen nur einfach auftauchen, vernachlässigen. Es ergibt sich für die drei Gleichungen:

Kontinuitätsgleichung:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0 \\ \Rightarrow \dot{\rho}_0 + \dot{\rho}' + \text{div}(\rho_0 \mathbf{v} + \rho' \mathbf{v}') &= 0 \\ \Rightarrow \dot{\rho}' + \rho_0 \text{div} \mathbf{v}' &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Impulsgleichung:

In der Impulsgleichung (2.7) hängt $\underline{\underline{I}}$ nur von Produkten von Schallgrößen ab und kann somit vernachlässigt werden:

$$\begin{aligned} (\rho \dot{\mathbf{v}}) + \text{div} \underline{\underline{I}} + \text{grad} p &= 0 \\ \dot{\rho} \mathbf{v} + \dot{\mathbf{v}} \rho + \text{grad} p &= 0 \\ \dot{\rho}' \mathbf{v} + \dot{\mathbf{v}}(\rho_0 + \rho') + \text{grad} p' + \text{grad} p_0 &= 0 \\ \rho_0 \dot{\mathbf{v}} + \text{grad} p' &= 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Energiegleichung:

Da ρ' sehr klein ist, entwickeln wir (2.9) um 0:

$$\begin{aligned} p(\rho) &= p_0 \cdot \frac{\rho^\kappa}{\rho_0^\kappa} \\ \Rightarrow p(\rho') &= p_0 \cdot \frac{(\rho_0 + \rho')^\kappa}{\rho_0^\kappa} \\ &\stackrel{(\text{Taylor})}{\rightarrow} = \frac{p_0}{\rho_0^\kappa} (\rho_0^\kappa + \kappa \rho' \rho_0^{\kappa-1} + \mathcal{O}(\rho'^2)) \\ \Rightarrow p(\rho') &= p_0 + p' = p_0 + \frac{p_0 \kappa}{\rho_0} \rho' \\ \Rightarrow p'(\rho') &= \frac{p_0 \kappa}{\rho_0} \rho' \end{aligned} \quad (2.12)$$

Wir nennen $c^2 := \frac{p_0 \kappa}{\rho_0}$ (später sehen wir, dass es sich bei c um die Schallgeschwindigkeit handelt). In (2.10) eingesetzt liefert:

$$\dot{p}' + \rho_0 c^2 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (2.13)$$

An dieser Stelle wollen wir das Geschwindigkeitspotential ψ definieren:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = -\operatorname{grad} \psi(\mathbf{x}, t) \quad (2.14)$$

(2.14) in (2.13) eingesetzt liefert:

$$\frac{\dot{p}'}{\rho_0} - c^2 \Delta \psi = 0 \quad (2.15)$$

(2.14) in (2.11) eingesetzt und differenzieren nach der Zeit im 2. Schritt ergibt:

$$\begin{aligned} \rho_0 \operatorname{grad} \dot{\psi} &= \operatorname{grad} p' \\ \rho_0 \operatorname{grad} \ddot{\psi} &= \operatorname{grad} \dot{p}' \\ \rho_0 \dot{\psi} &= p' \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\rho_0 \ddot{\psi} = \dot{p}' \quad (2.17)$$

Beim integrieren im letzten Schritt wird die Integrationskonstante Null gesetzt. Wir setzen (2.17) in (2.15) ein und erhalten die Wellengleichung, welche die Schallausbreitung in unserer Wasserrinne beschreibt:

$$c^2 \Delta \psi - \ddot{\psi} = 0 \quad (2.18)$$

(Hier wird klar, warum wir c als Ausbreitungsgeschwindigkeit indiziert haben.) Löst man die Wellengleichung und setzt das gewonnene $\psi(\mathbf{x}, t)$ in (2.16) oder (2.14) ein, erhält man die Schallgröße $p'(\mathbf{x}, t)$ oder $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$.

2.2.2 Randbedingungen

Mit (2.16) erhält man aus der Wellengleichung $Z := \rho_0 c = p'/\mathbf{v}$. Z nennt man Wellenwiderstand.

Trifft eine Welle aus Medium 1 (der Einfachheit senkrecht) auf eine Grenzfläche, wird ein Teil reflektiert und ein anderer geht durch und breitet sich in Medium 2 weiter aus. Wie groß die Anteile sind und welche Phasenbeziehung zwischen der einfallenden und den reflektierten Wellen besteht, hängt von den beiden Wellenwiderständen Z_1 und Z_2 ab. Die aus Medium 1 auf die Grenzfläche zulaufende Wellen haben den Wellenwiderstand $Z_1 = p'_+/v'_+$, die Reflektierte $Z_1 = p'_-/v'_-$. Das Verhältnis $p_-/p_+ =: r$ nennt man Reflexionsfaktor. Für diesen gilt:

$$r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{Z_2/Z_1 - 1}{Z_2/Z_1 + 1} \quad (2.19)$$

Wenn $|r| \approx 1$ so wird nahezu die komplette Welle an der Grenzfläche reflektiert. Ist allerdings $r \approx 0$, so geht die Welle ohne Reflektion an der Grenzfläche von Medium 1

in Medium 2 über. Man sagt auch, dass Medium 2 an das Medium 1 angepasst ist. Bei $Z_2/Z_1 \ll 1$ erhält man Reflektion mit Phasensprung und spricht von einer *schallweichen* Grenzfläche (der Schalldruck verschwindet an der Grenzfläche). Ist umgekehrt $Z_2/Z_1 \gg 1$, so erhält man Reflektion ohne Phasensprung und spricht von einer *schallharten* Grenzfläche (die wandnormale Schallschnelle verschwindet).

Diese einfache Betrachtungsweise gilt allerdings nur für senkrecht einfallende Wellen. Ändert sich der Einfallswinkel, so wird die Berechnung deutlich komplizierter, da aufgrund von Brechung das Verhältnis der Schallgeschwindigkeiten mit eingeht.

2.2.3 Lösung der Wellengleichung für eine schallweich begrenzte Wasserrinne

Alle Seiten unserer Wasserrinne sind schallweich begrenzt (der Übergang Wasser-Luft wird ebengfalls als schallweich angenommen). Unsere Koordinatenachsen haben wir entsprechend (Abb. 3) gewählt. Die Wasserrinne sei in x -Richtung deutlich größer ausgedehnt als

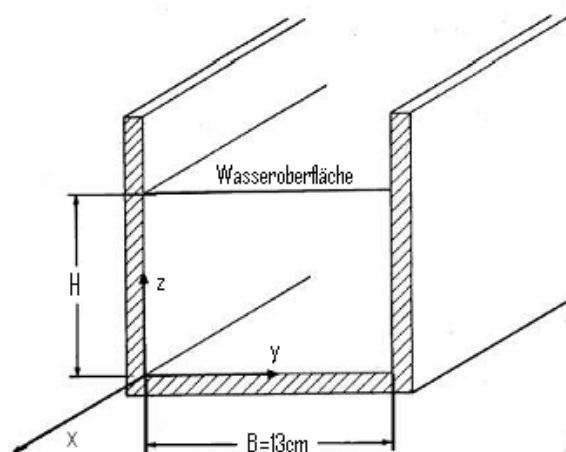


Abbildung 3: Wasserrinne im Querschnitt mit Koordinatensystem

in y oder z -Richtung. Da es sich um schallweiche Wände handelt, verschwindet an den Wänden der Schalldruck. Das Geschwindigkeitspotential muss am Rand also konstant sein. Die Menge \mathcal{R} beinhaltet alle Ortsvektoren $\mathbf{x} = (x, y, z)$, welche auf den Rand zeigen, also $\mathcal{R} = \{y = 0 \vee y = B \vee z = 0 \vee z = H\}$:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x} \in \mathcal{R}} &= 0 \\ \Rightarrow \psi(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x} \in \mathcal{R}} &= \phi_0(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

O.B.d.A setzen wir $\phi_0(\mathbf{x}) = 0$. (2.20) und die in (Abb. 3) angedeutete Geometrie der Wasserrinne (Wände alle eben und orthogonal zueinander) legen uns als Lösungsansatz den Separationsansatz nahe:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = X(x)X(y)Z(z)T(t) \quad (2.21)$$

In (2.18) eingesetzt erhalten wir (die Indizes x, y, z, t bedeuten, dass die Funktion nach diesen Variablen der Anzahl entsprechend oft abgeleitet wird):

$$\begin{aligned} X_{xx}YZT + XY_{yy}ZT + XYZ_{zz}T &= \frac{1}{c^2}XYZT_{tt} \\ \Rightarrow \frac{X_{xx}}{X} + \frac{Y_{yy}}{Y} + \frac{Z_{zz}}{z} &= \frac{T_{tt}}{c^2T} \end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung hängt nur von t , die linke nur von x, y, z ab. Also müssen beide Seiten gleich einer Konstanten (wir nennen sie $-k_0^2$) sein:

$$-k_0^2 = \frac{X_{xx}}{X} + \frac{Y_{yy}}{Y} + \frac{Z_{zz}}{z} = \frac{T_{tt}}{c^2T}$$

Mit gleicher Begründung müssen die ortsabhängigen Summanden für sich ebenfalls konstant sein:

$$\begin{aligned} -k_x^2 &:= \frac{X_{xx}}{X} & -k_y^2 &:= \frac{Y_{yy}}{Y} & -k_z^2 &:= \frac{Z_{zz}}{Z} \\ \Rightarrow k_0^2 &= k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Lösen der homogene DGLen mit dem Exponentialansatz liefert:

$$\begin{aligned} X(x) &= X_0 e^{-ik_x x} \\ Y(y) &= Y_1 e^{ik_y y} + Y_2 e^{-ik_y y} \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} Z(z) &= Z_1 e^{ik_z z} + Z_2 e^{-ik_z z} \\ T(t) &= T_0 e^{ik_0 ct} = T_0 e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Nur der Term mit positiven Exponenten macht in $T(t)$ physikkalischen Sinn. Wir gehen als zusätzliche Randbedingung davon aus, dass sich unsere Welle nur in positiver x -Richtung ausbreitet, daher betrachten wir auch hier nur *eine* Lösung für $X(x)$. Wir wählen die mit negativem Exponenten, da nur diese in der allgemeinen Lösung der Wellengleichung die Wellenausbreitung beschreibt.

Aus den Randbedingungen (2.20) ist zu erkennen, dass $Y(0) = 0, Y(B) = 0, Z(0) = 0$ und $Z(H) = 0$ gelten muss. Einsetzen von $Y(0) = 0$ in (2.23) liefert $Y_1 = -Y_2$:

$$\Rightarrow Y(y) = Y_1 (e^{ik_y y} - e^{-ik_y y}) = 2iY_1 \cdot \sin(k_y y) = Y_0 \sin(k_y y)$$

Aus der zweiten Randbedingung $Y(B) = 0$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} Y_0 \sin(k_y B) = 0 &\Rightarrow k_y B = n\pi; & n &\in \mathbb{N} \\ \Rightarrow k_{y,n} &= \frac{n\pi}{B} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Analog findet man (mit den Randbed. $Z(0) = 0$ und $Z(H) = 0$):

$$\begin{aligned} Z(z) &= Z_0 \sin(k_z z) \\ \Rightarrow k_{z,m} &= \frac{m\pi}{H}; & m &\in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Setzen wir k_y und k_z in (2.22) ein, erhalten wir für k_x :

$$k_{x, nm} = \sqrt{k_0^2 - \left(\left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H} \right)^2 \right)} = k_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_g}{\omega} \right)^2}$$

$\omega_g = c\pi\sqrt{n^2/B^2 + m^2/H^2}$ ist dabei die Grenzfrequenz. Für $(\omega_g/\omega)^2 < 1$ ist $k_{x, nm}$ reell, sonst imaginär. Wenn $k_{x, nm}$ imaginär ist, breitet sich in x -Richtung keine Welle aus. Die Amplitude nimmt dann exponentiell ab. Für $n = m = 1$ und einer Breite der Wasserrinne von $B = 13\text{cm}$ lässt sich somit ausrechnen, dass ab einer Wasserhöhe von $H \approx 7\text{cm}$ $k_{x, nm}$ imaginär wird. D.h., unterhalb von 7cm Wasserhöhe kann sich die $(1, 1)$ Mode *nicht* in x -Richtung ausbreiten. Diese Teillösungen in (2.21) eingesetzt ergeben sich die Wellengleichung ($\psi_0 = T_0 X_0 Y_0 Z_0$):

$$\psi_{nm}(\mathbf{x}, t) = \psi_0 \sin(k_y y) \sin(k_z z) e^{i(\omega t - k_x x)} \quad (2.27)$$

Die durch $\psi_{nm}(\mathbf{x}, t)$ beschriebene Lösung hängt von n, m ab, wir sprechen auch von einer (n, m) Mode. Es breiten sich natürlich alle denkbaren Moden aus, weshalb es nicht unbedingt sofort möglich ist, eine bestimmte Mode zu erkennen. Oben wurde gezeigt, dass sich die $(1, 1)$ Mode nur für $H > 7\text{cm}$ ausbreiten kann. Bei den nächst höheren Moden liegt diese kritische Mindesthöhe über 13cm . Wir betrachten die (zeitunabhängige) Verteilung des Schalldruckes $p'(\mathbf{x}, \cdot)$ in der y, z -Ebene für die $(1, 1)$ und $(2, 1)$ Mode (Abb. 4 und 5). Nach (2.16) ist:

$$p' \propto \sin(k_y y) \sin(k_z z)$$

Man erkennt, dass bei der $(1, 1)$ Mode in der Mitte der Wasserrinne der Schalldruck maximal ist. Deshalb werden wir unsere Messungen in der Mitte der Wasserrinne bei einer Höhe von 7 bis 13cm durchführen.

Schallgeschwindigkeit im Wasser:

Die Schallgeschwindigkeit ergibt sich aus (2.24) und (2.22) zu:

$$\begin{aligned} \omega &:= ck_0 \\ &= c\sqrt{k_{x, nm}^2 + k_{y, n}^2 + k_{z, m}^2} \end{aligned}$$

Die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit in x -Richtung sind wie in (2.2) und (2.4) definiert:

$$\begin{aligned} c_{ph, x} &= \frac{\omega}{k_x} = \frac{ck_0}{k_x} \\ c_{gr, x} &= \frac{d\omega}{dk_x} = \frac{ck_x}{k_0} \end{aligned}$$

Ein Vergleich beider Gleichungen liefert für die Schallgeschwindigkeit:

$$c = \sqrt{c_{gr} \cdot c_{ph}} \quad (2.28)$$

Wichtig ist insbesondere die Tatsache, dass die Schallgeschwindigkeit c *nicht* für *alle* (n, m) Moden gleich ist, da (2.28) nicht von n, m abhängt. Unsere Messung in der $(1, 1)$ Mode reicht also völlig aus.

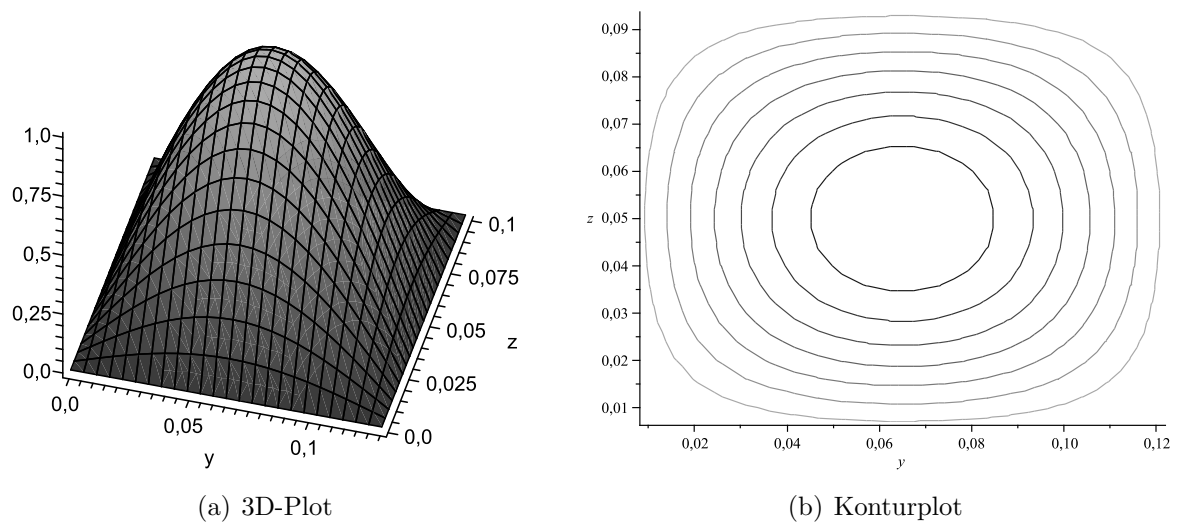


Abbildung 4: Schalldruck p' der (1, 1) Mode in y, z -Ebene im Kontur- und 3D-Plot

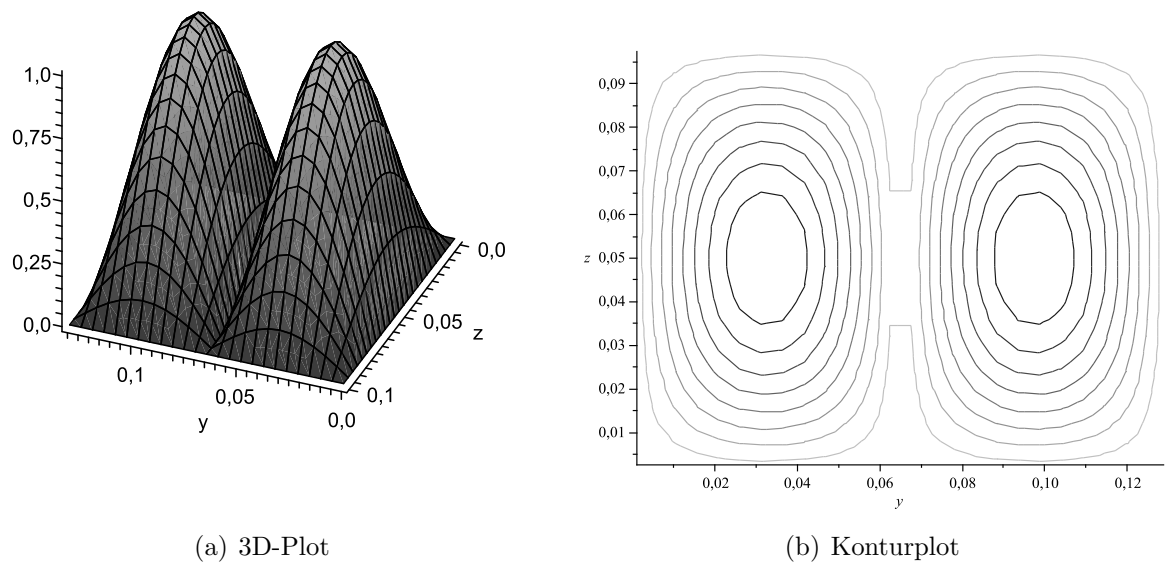


Abbildung 5: Schalldruck p' der (2, 1) Mode in y, z -Ebene im Kontur- und 3D-Plot

3 Auswertung

Wir wollen jetzt aus den Messdaten die Phasengeschwindigkeit c_{ph} , Gruppengeschwindigkeit c_{gr} und draus die Schallgeschwindigkeit c bestimmen. c steht für die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalls in einer unendlich ausgedehnten Wasserwanne (wo es i.B. keine Randbedingungen gibt).

3.1 Phasengeschwindigkeit

Der Signalgenerator erzeugt in der Wasserrinne eine Schallwelle mit $f = 12,5\text{kHz}$. Diese wird am Reflektor reflektiert. Der Abstand zwischen dem Signalgenerator und dem Reflektor wurde so eingestellt, dass sich die abgestrahlte und reflektierte Welle optimal überlagert haben. Die Position maximaler und minimaler Auslenkung konnten durch verschieben des Mikrophons auf dem Oszilloskop abgelesen werden. Gemessen haben wir für Wasserhöhen von 7cm bis 13cm in 0,5cm Schritten (Aus den in der Theorie genannten Gründen ist hier nur die (1,1) Mode ausbreitungsfähig). Bei jeder Wasserhöhe konnte so der Abstand zwischen 3 und 5 Knotenpunkten (entspricht 1 oder 2 Wellenlängen der Schallwelle) mit entsprechendem Fehler bestimmt werden. Die Phasengeschwindigkeit ist gerade definiert durch:

$$c_{ph}(h) = f \cdot \lambda(h)$$

(Fehler für h ist immer mit $\sigma_h = \pm 1\text{mm}$ angenommen; Fehler $\sigma_{c_{ph}} = f \cdot \sigma_h$) Dabei hängt die $c_{ph}(h)$ und die Wellenlänge $\lambda(h)$ natürlich von der Wasserhöhe in der Wasserrinne ab.

3.2 Gruppengeschwindigkeit

Zu Bestimmung der Gruppengeschwindigkeit wurde vom Signalgenerator im 50Hz Takt ein Impuls (entspricht einer Wellengruppe) mit einer Trägerfrequenz von 12,5kHz ausgesendet. Das Mikrophon war kurz vor dem Generator in der Wasserrinne platziert. Der Abstand $s(h)$ vom Reflektor zum Impulsgenerator wurde so eingestellt, dass ein Impuls genau 10 mal am Reflektor reflektiert wurde, bevor ein Neuer ausgesendet wurde. Durch Feinjustage von $s(h)$ wurde erreicht, dass alle 2ms ein reflektierter Impuls am Mikrofon detektiert wurde. D.h., auf dem Oszilloskop wurden 10 Wellenberge gleichzeitig angezeigt. Daraus folgt, dass ein 9-fach reflektierter Impuls genau 10 mal die Wasserrinne (hin und zurück) durchlaufen hat. Dafür brauchte er 20ms. Es ergibt sich für die Gruppengeschwindigkeit:

$$c_{gr} = \frac{20 \cdot s(h)}{20\text{ms}} \tag{3.1}$$

$$= \frac{1000 \cdot s(h)}{\text{s}} \tag{3.2}$$

3.3 Ergebnisse

Für verschiedene Wasserhöhen h haben wir die entsprechende Phasen- und Gruppengeschwindigkeit $c_{ph}(h)$ und $c_{gr}(h)$ bestimmt. Die allgemeine Schallgeschwindigkeit ist nach

(2.28):

$$c = \sqrt{c_{gr} \cdot c_{ph}}$$

(Fehler: $\sigma_c = \sqrt{\left(\frac{\partial c}{\partial c_{ph}}\right)^2 \sigma_{c_{ph}}^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial c_{gr}}\right)^2 \sigma_{c_{gr}}^2} = \sqrt{\frac{c_{gr} \sigma_{c_{ph}}^2}{4c_{ph}} + \frac{c_{ph} \sigma_{c_{gr}}^2}{4c_{gr}}}$). Trägt man c_{ph} , c_{gr} und c gegen die Wasserhöhe h auf, ergibt sich (Abb. 6). Man erkennt sehr gut, dass c für alle

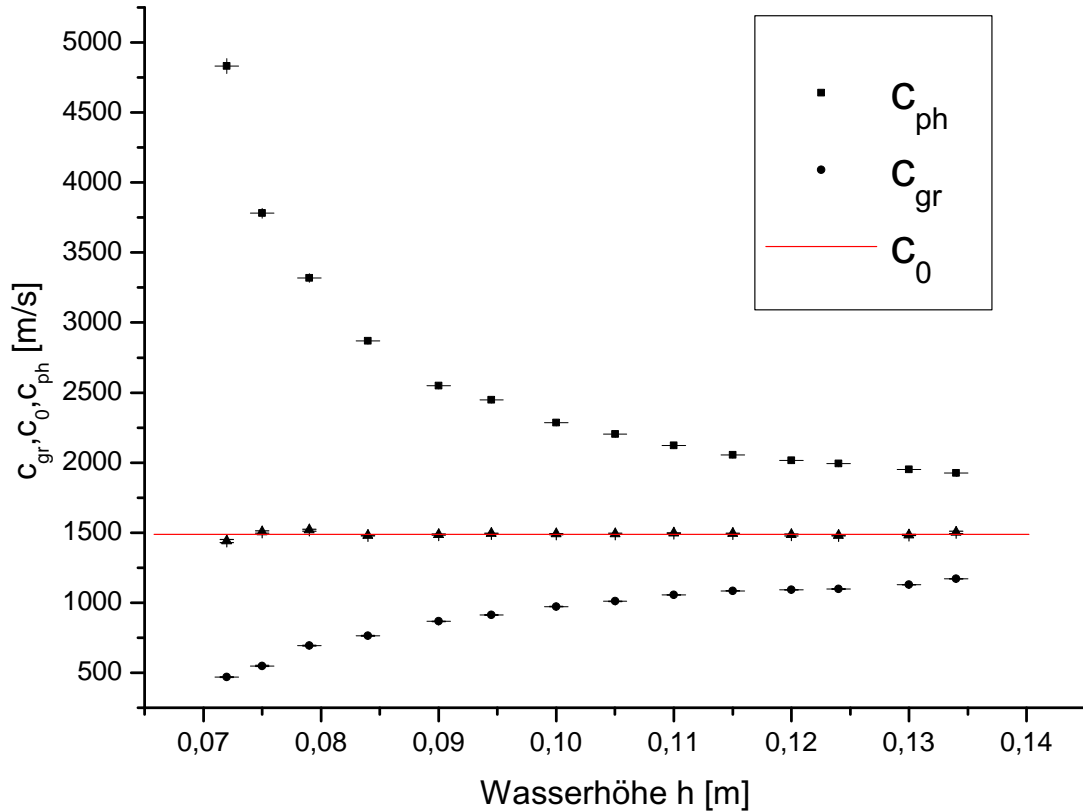


Abbildung 6: c_{ph} , c_{gr} und c über der Wasserhöhe h

Wasserhöhen h konstant ist. Es ergibt sich durch lineare Regression:

$$c = (1489 \pm 7) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Dieser Wert gilt bei einer Wassertemperatur zwischen 19°C und $19,4^\circ\text{C}$.

4 Diskussion

Der Versuch ließ sich reibungslos durchführen. Die Messwerte ließen sich ebenfalls sauber bestimmen, was sich in den kleinen Fehlerbalken in (Abb. 6) widerspiegelt. Wir haben die

Schallgeschwindigkeit mit $c = (1489 \pm 7) \frac{\text{m}}{\text{s}}$ bestimmt. Der Literaturwert ist $c_{lit} = 1484 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (Wikipedia) für eine Temperatur von 20°C . Es handelt sich also um eine Abweichung von $0,3\%$. Der Literaturwert liegt in unserem äußerst kleinen Fehlerbereich. Im Großen und Ganzen ist das ein sehr zufriedenstellendes Ergebnis.